Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре, 2 семестр

Репин О.Н., под редакцией Зайцева Ю.В.

13 февраля 2006 г.

Аннотация

Данные лекции читались на радиофизическом факультете ННГУ им. Лобачевского во втором семестре 2004–2005 учебного года.

...

Содержание

Введение **4**

Лекция 1 (17.02.05) **5**
1.1 Предварительные сведения 5
1.2 Матрицы 6
1.2.1 Общие сведения о матрицах (?) 6
1.2.2 Свойства определителей матриц 7

Лекция 2 (24.02.05) **10**
2.1 Разложение определителя по строкам (столбцам) 10
2.2 Вычисление определителей (примеры) 12

Введение

Предметом данных лекций ...

Лекция 1 (17.02.05)

1.1 Предварительные сведения

Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$ — числовое n-элементное множество.

Определение. *Перестановкой* (П) назовем упорядоченный набор элементов множества A.

Пример.

$$\begin{array}{rcl} A & = & (1,3,5,7) \\ \Pi_1 & = & (3,1,7,5) \\ \Pi_2 & = & (5,7,1,3) \end{array}$$

Теорема 1.1 (о числе перестановок). *Число перестановок P_n n-элементного множества A вычисляется по формуле $P_n = n!$.*

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции:

1. При $n = 1$ утверждение очевидно.
2. Положим теперь, что при $n = k$ $P_k = k!$.
3. Покажем, что для $n = k + 1$ выполняется тождество $P_{k+1} = (k + 1)!$. Действительно,

$$P_{k+1} = \underbrace{k! + k! + \dots k!}_{k+1 \text{ раз}} = (k+1)!$$

Определение. Если в перестановке П $a_i > a_j$ для некоторых $i < j$, то (a_i, a_j) образует *инверсию.*

Пример. В перестановке $\Pi = (3, 2, 1, 5, 4)$ есть следующие инверсии:

$$(3,2); \quad (3,1); \quad (2,1); \quad (5,4)$$

Следовательно, число инверсий $I(\Pi) = 4$.

Пример. $I(5, 3, 4, 1, 2) = 4 + 2 + 2 = 8$.

Определение. Если число инверсий в перестановке $I(\Pi)$ – четно (нечетно), то перестановка П называется четной (нечетной).

Определение. *Транспозицией* назовем перемену местами двух чисел в перестановке.

Теорема 1.2 (о транспозиции). *Каждая транспозиция меняет четность перестановки.*

Доказательство. Рассмотрим вначале случай „соседней“ транспозиции:

$$\begin{array}{rcl} \Pi_1 & = & a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n \\ \Pi_2 & = & a_1, \dots, a_{i+1}, a_i, \dots, a_n \quad . \end{array}$$

Очевидно, что если $a_i < a_{i+1}$, то $I(\Pi_2) = I(\Pi_1)+1$, а в случае, если $a_i > a_{i+1}$ — $I(\Pi_2) = I(\Pi_1) - 1$.

Теперь рассмотрим случай произвольной транспозиции:

$$\begin{array}{rcl} \Pi_1 & = & a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+m}, \ldots, a_n \\ \Pi_2 & = & a_1, \ldots, a_{i+m}, a_i, \ldots, a_i, \ldots, a_n \end{array} .$$

Нетрудно заметить, что перестановка Π_2 получается из Π_1 с помощью $2m-1$ (нечетного числа!) соседних транспозиций, каждая из которых меняет четность исходной перестановки Π_1. Теорема доказана.

Определение. *Подстановкой* (Π_0) назовем взаимооднозначное отображение числового множества A на себя.

$$\Pi_0 : \quad \varphi = \left\{ \begin{array}{cccc} a_1, & a_2, & \ldots & a_n \\ \varphi(a_1), & \varphi(a_2), & \ldots & \varphi(a_n) \end{array} \right\}$$

Отметим, что число различных подстановок для можества $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ будет $n!$.

Пример. Пусть дано множество $A = (1, 2, 3, 4, 5)$. Тогда одной из его подстановок, будет, например, следующая:

$$\varphi_1 = \left\{ \begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 5, & 2, & 4, & 3, & 1 \end{array} \right\}$$

Определение. Подстановка Π_0 называется *четной (нечетной)*, если число инверсий во 2-ой строке четно (нечетно).

Теорема 1.3. *Для некоторого множества $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ число четных подстановок равно числу нечетных подстановок и, в свою очередь, равно* $\frac{n!}{2}$.

Доказательство. Справедливость теоремы полностью следует из теоремы 1.2.

1.2 Матрицы

1.2.1 Общие сведения о матрицах (?)

Определение. *Матрицей* назовем множество $m \times n$ элементов, расположенных в виде таблицы.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Определение. Обозначим за $\mathcal{P}_{m \times n}$ множество матриц размера $m \times n$.

Определение. Матрица $m \times n$ называется *квадратной*, если $m = n$.

Определение. Для заданной матрицы $A \in \mathcal{P}_{m \times n}$, матрица A^T называется *транспонированной*, если она построена следующим образом:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Определение. Квадратная матрица называется *диагональной*, если она имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определение. *Единичную* матрицу E определим следующим образом:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Определение. Пусть дана квадратная матрица $A \in \mathcal{P}_{n\times n}$. *Определителем* такой матрицы назовем число

$$\det A = |A| = \sum \underbrace{(-1)^s a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}}_{\text{общий член определителя } A} = \sum (-1)^r a_{j_1 1} a_{j_2 2} \dots a_{j_n n},$$

где

$$s = I(i_1, i_2, \dots, i_n)$$
$$r = I(j_1, j_2, \dots, j_n),$$

при этом, суммирование ведется либо по всем возможным перестановкам $(i_1, i_2, \dots, i_n)$, либо $(j_1, j_2, \dots, j_n)$.

Пример. Рассмотрим случай $n = 2$. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

тогда $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Для $n = 3$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{и, соответственно,}$$

$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$.

1.2.2 Свойства определителей матриц

1. $\det A = \det A^T$, т.е. свойства матриц, справедливые для строк A остаются верными и для столбцов.
2. Если матрица A содержит строку, состоящую из нулей, то $\det A = 0$.
3. Если матрица B получена из A перестановкой двух строк, то $\det B = -\det A$.
4. Если в матрице A есть две одинаковых строки, то $\det A = 0$.

5. Определитель обладает свойством линейности, т.е.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha b_{k1}+\beta c_{k1} & \dots & \alpha b_{kn}+\beta c_{kn} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$
$$= \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{kn} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ c_{k1} & \dots & c_{kn} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

6. Если в матрице A какая-либо строка является линейной комбинацией других строк, то $\det A = 0$.

7. $\det A$ не изменится, если в матрице A к какой-либо строке прибавить линейную комбинацию других строк.

Доказательство. Свойства 1 и 2 с очевидностью следуют из данных определений.

3. Пусть определены матрицы A и B:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$
Тогда
$$\begin{aligned} \det A = \sum (-1)^s a_{1i_1} \dots a_{ki_k} \dots a_{li_l} \dots a_{ni_n} = \\ = \sum -(-1)^s a_{1i_1} \dots a_{li_l} \dots a_{ki_k} \dots a_{ni_n} = -\det B, \end{aligned}$$
и т. к., по доказанной теореме, $I(i_1, \dots, i_k, \dots, i_l, \dots, i_n)$ четно, если $I(i_1, \dots, i_l, \dots, i_k, \dots, i_n)$ нечетно и, соответственно, наоборот.

4. Непосредственно воспользуемся свойством 3, т.е. поменяем местами те самые две одинаковых строки. Но тогда, т.к. получившаяся в результате перестановки строк матрица $B = A$,
$$\det B = -\det A = \det A \Rightarrow 2\det A = 0 \Rightarrow \det A = 0.$$

5. Воспользуемся определением определителя матрицы:
$$\begin{aligned} \sum (-1)^s a_{1i_1} \dots (\alpha b_{ki_k} + \beta c_{ki_k}) \dots a_{ni_n} = \\ = \alpha \sum (-1)^s a_{1i_1} \dots b_{ki_k} \dots a_{ni_n} + \beta \sum (-1)^s a_{1i_1} \dots c_{ki_k} \dots a_{ni_n}. \end{aligned}$$

6. Следует из свойства 5.

7. Следует из свойства 6.

Определение. Пусть $A \in \mathcal{P}_{n\times n}$. *Минором* элемента a_{ij} – M_{ij} назовем определитель матрицы, полученной из A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Определение. *Алгебраическим дополнением* к элементу a_{ij} назовем $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

Пример. Найдем минор и алгебраическое дополнение для элемента a_{12} для заданной матрицы A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad A_{12} = (-1)^{(1+2)}M_{12} = -M_{12}.$$

Лекция 2 (24.02.05)

2.1 Разложение определителя по строкам (столбцам)

Теорема 2.1 (первая теорема о разложении). *Пусть в* $A \in \mathcal{P}_{n\times n}$ *— все элементы, находящиеся на* i*-ой строке или в* j*-ом столбце равны нулю, кроме самого элемента, находящегося на пересечении* i*-ой строки и* j*-го столбца. Тогда* $\det A = a_{ij}A_{ij}$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда выбранный элемент a_{ij} находится в правом нижнем углу матрицы A, т.е. $i = j = n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & 0 \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \dots & a_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= \sum(-1)^s a_{1i_1}\dots a_{n-1i_{n-1}}a_{ni_n} = \\ &= (-1)^s a_{1i_1}\dots a_{n-1i_{n-1}}a_{nn} = (-1)^{n+n}a_{nn}M_{nn} = a_{nn}A_{nn} \end{aligned}$$

Теперь обобщим доказательство на случай произвольных i и j. Рассмотрим матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Элемент a_{ij} можно переместить на позицию (n, n) при помощи $n - i$ транспозиций по вертикали и $n - j$ транспозиций по горизонтали. Следовательно, из предыдущего утверждения,

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{(n-i)+(n-j)}a_{ij}M_{ij} = \\ &= (-1)^{2(n-i-j)+(i+j)}a_{ij}M_{ij} = (-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij} = a_{ij}A_{ij}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 2.2 (вторая теорема о разложении). *Пусть* $A \in \mathcal{P}_{n\times n}$. *Тогда определитель этой матрицы можно вычислить по формуле:*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

Доказательство. Рассмотрим определитель матрицы A:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{i1}A_{i1} + \dots + a_{ij}A_{ij} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

Следствие. $\det A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ (разложение матрицы по j-му столбцу).

Определение. Пусть в матрице $A \in \mathcal{P}_{n\times n}$ выделены строки $i_1, i_2, \dots, i_k$ и столбцы $j_1, j_2, \dots, j_k$. Тогда *минором k-ого порядка* $m^{i_1,i_2,\dots,i_k}_{j_1,j_2,\dots,j_k}$ называется определитель матрицы из перечеркнутых элементов. *Дополнительным минором k-ого порядка* $M^{i_1,i_2,\dots,i_k}_{j_1,j_2,\dots,j_k}$ называется определитель матрицы, составленной из оставшихся элементов. *Алгебраическим дополнением* к минору $m^{i_1,i_2,\dots,i_k}_{j_1,j_2,\dots,j_k}$ называется число, вычисляемое по следующей формуле:

$$A^{i_1,i_2,\dots,i_k}_{j_1,j_2,\dots,j_k} = (-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+i_k} m^{i_1,i_2,\dots,i_k}_{j_1,j_2,\dots,j_k}.$$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$m^{13}_{23} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad M^{13}_{23} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A^{13}_{23} = (-1)^{1+3+2+3} m^{13}_{23} = (-1) \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Теорема 2.3 (теорема Лапласа). *Пусть дана матрица $A \in \mathcal{P}_{n\times n}$. Тогда*

$$\det A = \sum M^{i_1,i_2,\dots,i_k}_{j_1,j_2,\dots,j_k} A^{i_1,i_2,\dots,i_k}_{j_1,j_2,\dots,j_k},$$ *??? тут ведь M, а не m? в лекции m*

где сумма ведется по всевозможным выборкам $(j_1, j_2, \dots, j_k)$ из множества $\{1, 2, \dots, n\}$.

Без доказательства.

Пример. Рассмотрим т.н. блочную матрицу D:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 \\ b_{11} & \dots & b_{1n} & c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} & c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}.$$

Разложение её по первым n строкам даёт следующее тождество: $|D| = |A||C|$. С другой стороны, разложение по строкам $n+1, n+2, \dots, 2n$ даёт для определителя D другое выражение:

$$|D| = (-1)^{1+2+\ldots+n+(n+1)+\ldots+2n}|B||C| = (-1)^{\frac{(2n+1)2n}{2}}|B||C| = (-1)^n|B||C|.$$

2.2 Вычисление определителей (примеры)

1. Определитель треугольной матрицы.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

2. Метод приведения симметричной матрицы к треугольной. Рассмотрим симметричную матрицу Δ_n:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & b \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}.$$

Прибавим к первому столбцу остальные:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \dots & b \\ a+(n-1)b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+(n-1)b & b & \dots & a \end{vmatrix} = (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \dots & b \\ 1 & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b & \dots & a \end{vmatrix}$$

Далее вычтем из 2-ой строки 3-ю и т.д., причем из последней строки вычтем первую. Получим:

$$\Delta_n = (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \dots & b \\ 0 & a-b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}.$$

3. Метод рекуррентных соотношений.